Capítulo 3

3

Cálculos numéricos

3-1 Antes de realizar un cálculo
3-2 Cálculos diferenciales
3-3 Cálculos diferenciales cuadráticos
3-4 Cálculos integrales
3-5 Cálculos de valores máximos/mínimos
3-6 Cálculos de sumatorias (Σ)

3-1 Antes de realizar un cálculo

A continuación se describen los ítemes que se disponen en los menús que se utilizan cuando se realizan resoluciones, diferenciales/diferenciales cuadráticas, integraciones, valores máximos/mínimos y cálculos de Σ.

P.27

Cuando el menú de opciones se encuentra sobre la presentación, presione F4 (CALC) para visualizar el menú de análisis de funciones. Los ítemes de este menú se usan cuando realizan tipos específicos de cálculos.

- {**Solve**}/{d/dx}/{d^2/dx^2}/{$\int dx$} ... cálculos de {resolución}/{diferencial}/{diferencial cuadrática}/{integración}
- {**FMin**}/{**FMax**}/{**Σ(**} ... cálculos de {valor mínimo}/{valor máximo}/{Σ (sumatoria)}

Cálculos de resolución

La siguiente es la sintaxis para usar la función de resolución en un programa.

Solve($f(x)$, $\underline{n}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$)

- b: *Límite superior*
- a: *Límite inferior*
- n: *Valor estimado inicial*

- Existen dos métodos de ingreso diferentes que pueden usarse para los cálculos de resolución: asignación directa e ingreso de tabla de variables.

  Con el método de asignación directa (el que se describe aquí), los valores se asignan directamente a la variables. Este tipo de ingreso es idéntico al usado con el mando Solve que se usa en el modo PRGM.

  El ingreso de tabla de variables se usa con la función de resolución (SOLVE) en el modo EQUA. Este método de ingreso es el recomendado para la mayoría de los ingresos de la función de resolución normal.

P.394

P.107

3-2 Cálculos diferenciales

[OPTN]-[CALC]-[*d*/*dx*]

Para realizar los cálculos diferenciales, primero visualice el menú de análisis de función, y luego ingrese los valores mostrados en la fórmula siguiente.

$$\boxed{\text{F2}}\,(d/dx)\ f(x)\ \boxed{,}\ \underline{a}\ \boxed{,}\ \underline{\varDelta x}\ \boxed{)}$$

Aumento/disminución de x

Punto para el cual desea determinar la derivada

$$d/dx\ (f(x), a, \varDelta x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(a)$$

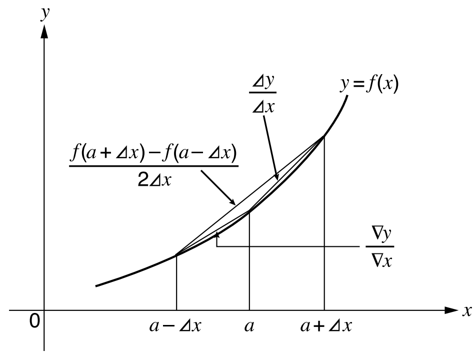
La diferenciación para este tipo de cálculo se define como:

$$f'(a) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(a + \varDelta x) - f(a)}{\varDelta x}$$

En esta definición, *infinitesimal* se reemplaza por una $\varDelta x$ *suficientemente pequeña*, con el valor en la vecindad de $f'(a)$ calculado como:

$$f'(a) \fallingdotseq \frac{f(a + \varDelta x) - f(a)}{\varDelta x}$$

Para proporcionar la mejor precisión posible, esta unidad emplea la diferencia central para realizar los cálculos diferenciales. A continuación se ilustra la diferencia central.



Las pendientes del punto a y un punto $a + \varDelta x$, y de un punto a y un punto $a - \varDelta x$ en función de $y = f(x)$ son las siguientes:

$$\frac{f(a + \varDelta x) - f(a)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}\ ,\ \frac{f(a) - f(a - \varDelta x)}{\varDelta x} = \frac{\nabla y}{\nabla x}$$

En lo anterior, $\varDelta y/\varDelta x$ es lo que se denomina diferencia en avance, mientras $\nabla y/\nabla x$ es la diferencia en retroceso. Para calcular las derivadas, la unidad toma el promedio entre el valor de $\varDelta y/\varDelta x$ y $\nabla y/\nabla x$, proporcionando por lo tanto mayor precisión a las derivadas.

Este promedio, que se denomina la *diferencia central*, se expresa como:

$$f'(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\frac{f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$

•Para realizar un cálculo diferencial

Ejemplo **Determinar la derivada en el punto $x = 3$ para la función $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$, cuando el aumento/diferencia de x se define como $\Delta x = 1\text{E}-5$.**

Ingrese la función $f(x)$.

AC OPTN F4 (CALC) F2 (d/dx) X,θ,T ^ 3 + 4 X,θ,T x^2 + X,θ,T − 6 ,

Ingrese el punto $x = a$ para el cual desea determinar la derivada.

3 ,

Ingrese Δx, que es el aumento/disminución de x.

1 EXP (−) 5)

EXE

```
d/dx(X^3+4X²+X-6,3,1E
-5)
                    52
```

- En la función $f(x)$, solamente puede usarse X como una variable en las expresiones. Otras variables (A hasta la Z, r, θ) son tratadas como constantes, y el valor actualmente asignado a esa variable se aplica durante el cálculo.
- El ingreso de Δx y el cierre de paréntesis pueden omitirse. Si se omite Δx, la calculadora utiliza automáticamente un valor para Δx que es apropiado para el valor de la derivativa que está tratando de determinar.
- Los puntos o secciones sin continuidad con drásticas fluctuaciones pueden afectar la precisión o aun producir un error.

Aplicaciones de cálculos diferenciales

- Los diferenciales pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse unas con otras.

$$\frac{d}{dx} f(a) = f'(a), \quad \frac{d}{dx} g(a) = g'(a)$$

Por lo tanto:

$$f'(a) + g'(a), \quad f'(a) \times g'(a), \text{ etc.}$$

- Los resultados diferenciales pueden usarse en la suma, resta, multiplicación y división, y en las funciones.

$$2 \times f'(a), \log(f'(a)), \text{ etc.}$$

- Las funciones pueden usarse en cualquier término ($f(x)$, a, Δx) de un diferencial.

$$\frac{d}{dx} (\text{sen}x + \cos x, \text{ sen}0{,}5), \text{ etc.}$$

- Tenga en cuenta que no puede usar una resolución, diferencial, diferencial cuadrática, integral, valor máximo/mínimo o expresión de cálculo de Σ, dentro de un término de cálculo diferencial.

- Presionando AC durante un cálculo diferencial (mientras el cursor no se visualiza en la presentación) el cálculo queda interrumpido.
- Lleve a cabo siempre los diferenciales trigonométricos usando radianes (modo Rad) como la unidad angular.

3-3 Cálculos diferenciales cuadráticos

[OPTN]-[CALC]-[d^2/dx^2]

Luego de visualizar el menú de análisis de función, puede ingresar expresiones diferenciales cuadráticas usando uno de los dos siguientes formatos.

F3 (d^2/dx^2) $f(x)$, a , n)

Límite final (n = 1 a 15)

Punto de coeficiente diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x), a, n) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f(a)$$

Los cálculos diferenciales cuadráticos producen un valor diferencial aproximado usando la siguiente fórmula diferencial de segundo orden, que se basa en la interpretación polinómica de Newton.

$$f''(x) = \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2}$$

En esta expresión, los valores para los “incrementos suficientemente pequeños de x” son calculados secuencialmente usando la fórmula siguiente, con el valor de m siendo sustituido como m = 1, 2, 3 y así sucesivamente.

$$h = \frac{1}{5^m}$$

El cálculo es finalizado cuando el valor de $f''(x)$ basado en el valor de h que se calcula usando el último valor de m, y el valor de $f''(x)$ basado en el valor de h que se calcula usando el valor actual de m son idénticos, antes de que se alcance el límite superior n.

- Normalmente, no se debe ingresar un valor para n. Se recomienda que solamente ingrese un valor para n cuando se requiera para la precisión del cálculo.
- Ingresando un valor mayor para n, no necesariamente produce una mayor precisión.

●Para realizar un cálculo diferencial cuadrático

Ejemplo **Determinar el coeficiente diferencial cuadrático en el punto en donde $x = 3$ para la función $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$.**
En este caso, usaremos un valor de límite final de $n = 6$.

Ingrese la función $f(x)$.

AC OPTN F4 (CALC) F3 (d^2/dx^2) X,θ,T ^ 3 +

4 X,θ,T x^2 + X,θ,T − 6 ,

Ingrese 3 como el punto a, que es el punto del coeficiente diferencial.

[3] [,]

Ingrese 6 como n, que es el límite final.

[6] [)]

[EXE]

```
d²/dx²(X^3+4X²+X−6,3,
6)
                     26
```

- En la función $f(x)$, solamente puede usarse X como una variable en las expresiones. Otras variables (A hasta la Z, r, θ) son tratadas como constantes, y el valor actualmente asignado a esa variable se aplica durante el cálculo.
- El ingreso del valor n de límite final y símbolo de cierre de paréntesis puede omitirse.
- Los puntos o secciones sin continuidad con drásticas fluctuaciones pueden afectar la precisión o aun producir un error.

■ Aplicaciones diferenciales cuadráticas

- Las operaciones aritméticas pueden realizarse usando dos diferenciales cuadráticas.

$$\frac{d^2}{dx^2} f(a) = f''(a),\ \ \frac{d^2}{dx^2} g(a) = g''(a)$$

Por lo tanto:

$$f''(a) + g''(a),\ \ f''(a) \times g''(a), \text{ etc.}$$

- El resultado de un cálculo diferencial cuadrático puede usarse en un cálculo de función o aritmético subsiguiente.

$$2 \times f''(a),\ \ \log(f''(a)), \text{ etc.}$$

- Las funciones pueden usarse dentro de los términos ($f(x)$, a, n) de una expresión diferencial cuadrática.

$$\frac{d^2}{dx^2}(\text{sen}\, x + \cos x, \text{sen}\, 0{,}5), \text{ etc.}$$

- Tenga en cuenta que no puede usar una resolución, diferencial, diferencial cuadrática, integral, valor máximo/mínimo o expresión de cálculo de Σ, dentro de un término de cálculo diferencial cuadrático.

- Utilice solamente enteros dentro de la gama de 1 a 15 para el valor de límite n final. El uso de un valor fuera de esta gama genera un error.
- Un cálculo diferencial cuadrático en procesamiento puede interrumpirse presionando la tecla [AC].
- Siempre utilice radianes (modo Rad) como la unidad angular cuando realice diferenciales cuadráticas trigonométricas.

3-4 Cálculos integrales

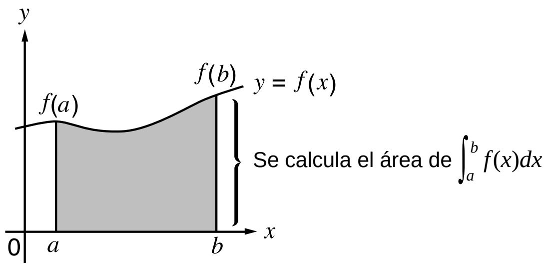
Para realizar los cálculos integrales, primero visualice el menú de análisis de función, y luego ingrese los valores mostrados en la fórmula siguiente.

Regla de Gauss-Kronrod

[F4] (∫dx) $f(x)$ [,] a [,] b [,] tol [)]

Tolerancia
Punto de finalización
Punto de inicío

$$\int(f(x), a, b, tol) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$$



Regla de Simpson

[F4] (∫dx) $f(x)$ [,] a [,] b [,] n [)]

Número de divisiones (valor para n en N = 2^n,
n: un número entero de 1 al 9)
Punto de finalización
Punto de inicio

$$\int(f(x), a, b, n) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx,\ N = 2^n$$

Como se muestra en la ilustración anterior, los cálculos integrales se realizan calculando los valores integrales desde a hasta b para la función $y = f(x)$ en donde $a \leqq x \leqq b$, y $f(x) \geqq 0$*. Esto en efecto calcula el área de superficie del área sombreada en la ilustración.

* Cuando $f(x) < 0$ en $a \leqq x \leqq b$, el cálculo del área de la superficie produce valores negativos (área de superficie debajo del eje x).

■ Cambiando los métodos de cálculo integral

P.6

Para los cálculos integrales, esta calculadora puede usar la regla de Gauss-Kronrod o la regla de Simpson. Para seleccionar un método, visualice la pantalla de ajustes básicos y seleccione ya sea "**Gaus**" (para la regla de Gauss-Kronrod) o "**Simp**" (para la regla de Simpson) para el ítem de integración.

Todas las explicaciones de este manual utilizan la regla Gauss-Kronrod.

•Para realizar un cálculo integral

Ejemplo **Llevar a cabo el cálculo de integración para la función mostrada a continuación, con una tolerancia “tol” = 1E - 4.**

$$\int_1^5 (2x^2 + 3x + 4)\, dx$$

Ingrese la función $f(x)$.

AC OPTN F4 (CALC) F4 ($\int dx$) 2 X,θ,T x^2 + 3 X,θ,T + 4 ,

Ingrese el punto de inicio y punto de finalización.

1 , 5 ,

Ingrese el valor de tolerancia.

1 EXP (−) 4) EXE

```
∫(2X²+3X+4,1,5,1E-4)
             134.6666667
```

- En la función $f(x)$, solamente puede usarse X como una variable en las expresiones. Otras variables (A hasta la Z, r, θ) son tratadas como constantes, y el valor actualmente asignado a esa variable se aplica durante el cálculo.
- El ingreso de “tol” en la regla de Gauss-Kronrod, “n” en la regla de Simpson, y los cierres de paréntesis con ambas reglas pueden ser omitidas. Si omite “tol”, la calculadora utiliza automáticamente un valor de 1E - 5. En el caso de “n”, la calculadora selecciona automáticamente el valor más apropiado.
- Los cálculos integrales pueden tomar un largo tiempo en completarse.

■ Aplicación del cálculo integral

- Las integrales pueden usarse en la suma, resta, multiplicación o división.

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_c^d g(x)\, dx, \text{ etc.}$$

- Los resultados de cálculos integrales pueden usarse en la suma, resta, multiplicación o división en las funciones.

$$2 \times \int_a^b f(x)\, dx, \text{ etc.} \quad \log \left(\int_a^b f(x)\, dx\right), \text{ etc.}$$

- Las funciones pueden usarse en cualquiera de los términos ($f(x)$, a, b, n) de una integral.

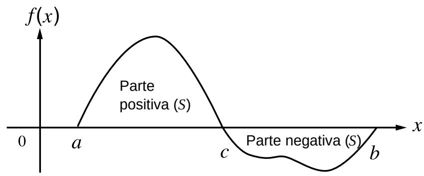
$$\int_{\text{sen } 0{,}5}^{\cos 0{,}5} (\text{sen } x + \cos x)\, dx = \int(\text{sen } x + \cos x, \text{ sen } 0{,}5, \cos 0{,}5, 5)$$

- Tenga en cuenta que no puede usar una resolución diferencial, diferencial cuadrática, integral, valor máximo/mínimo o expresión de cálculo de Σ, dentro de un término de cálculo integral.

- Presionando AC durante un cálculo integral (mientras el cursor no se visualiza en la presentación) el cálculo queda interrumpido.
- Siempre realice las integraciones trigonométricas usando radianes (modo Rad) como la unidad angular.
- Los factores tales como el tipo de función que se está realizando, los valores positivo y negativo dentro de las divisiones, y la división en donde la integración está siendo llevada a cabo puede ocasionar un error significante en los valores de integración y resultados de cálculos erróneos.

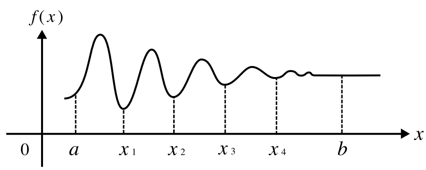
Observe los puntos siguientes para asegurar valores de integración correctas.

(1) Cuando los valores de integración de funciones cíclicas se convierten positivos o negativos para diferentes divisiones, realice el cálculo para ciclos simples, o separe entre negativo y positivo, y luego sume los resultados juntos.



$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\textit{Parte positiva } (S)} + \underbrace{\left(-\int_c^b f(x)dx\right)}_{\textit{Parte negativa } (S)}$$

(2) Cuando diminutas fluctuaciones en las divisiones de integración producen grandes fluctuaciones en los valores de la integral, calcule las divisiones de integración separadamente (divida las áreas de fluctuación más grandes en divisiones pequeñas), y luego sume los resultados juntos.



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{x_4}^{b} f(x)dx$$

3-5 Cálculos de valores máximos/mínimos

[OPTN]-[CALC]-[FMin]/[FMax]

Luego de visualizar el menú de análisis de función, puede ingresar cálculos de valores máximos/mínimos usando los formatos siguientes, y resolver los valores máximos y mínimos de una función dentro de un intervalo $a \leqq x \leqq b$.

•Valor mínimo

[F6](▷)[F1](FMin) $f(x)$ [,] a [,] b [,] n [)]

Precisión (n = 1 a 9)
Punto inicial de intervalo
Punto final de intervalo

•Valor máximo

[F6](▷)[F2](FMax) $f(x)$ [,] a [,] b [,] n [)]

Precisión (n = 1 a 9)
Punto inicial de intervalo
Punto final de intervalo

•Realizando cálculos de valores máximos y mínimos

Ejemplo 1 **Determinar el valor mínimo para el intervalo definido por el punto inicial a = 0 y punto final b = 3, con una precisión de n = 6 para la función $y = x^2 - 4x + 9$.**

Ingrese $f(x)$.

[AC] [OPTN] [F4](CALC) [F6](▷)[F1](FMin) [X,θ,T] [x²] [−] [4] [X,θ,T] [+] [9] [,]

Ingrese el intervalo a = 0, b = 3.

[0] [,] [3] [,]

Ingrese la precisión n = 6.

[6] [)]

[EXE]

Ejemplo 2 **Determinar el valor máximo para el intervalo definido por el punto inicial a = 0 y el punto final b = 3, con una precisión de n = 6 para la función $y = -x^2 + 2x + 2$.**

Ingrese $f(x)$.

AC OPTN F4(CALC) F6(▷) F2(FMax) (−) X,θ,T x^2 + 2 X,θ,T + 2 ,

Ingrese el intervalo a = 0, b = 3.

0 , 3 ,

Ingrese la precisión n = 6.

6)

EXE

- En la función $f(x)$, solamente X puede usarse como una variable en la expresión. Otras variables (A a la Z, r, θ) son tratadas como constantes, y el valor actualmente asignado a esa variable se aplica durante el cálculo.
- El ingreso del valor n y el símbolo de cierre de paréntesis siguiendo al valor de precisión pueden omitirse.
- Los puntos o secciones sin continuidad con drásticas fluctuaciones pueden afectar la precisión o aun producir un error.
- Tenga en cuenta que no puede usar una resolución, diferencial, diferencial cuadrática, integral, valor máximo/mínimo o expresión de cálculo de Σ, dentro de un término de cálculo de valor máximo/mínimo.
- Ingresando valores más grandes para n, aumenta la precisión del cálculo, pero también aumenta la cantidad de tiempo que se requiere para realizar el cálculo.

- El valor que ingresa para el punto final del intervalo (b) debe ser mayor que el valor que se ha ingresado para el punto inicial (a). De lo contrario se generará un error.
- El cálculo de valor máximo/mínimo en procesamiento puede interrumpirse presionando la tecla AC.
- Para el valor de n se puede ingresar un entero de 1 al 9. Usando cualquier valor fuera de esta gama genera un error.

3-6 Cálculos de sumatorias (Σ)

[OPTN]-[CALC]-[Σ(]

Para realizar los cálculos de Σ, primero visualice el menú de análisis de función, y luego ingrese los valores mostrados en la fórmula siguiente.

[F6](▷)[F3](Σ() a_k [,] k [,] α [,] β [,] n [)]

Distancia entre particiones
Ultimo término de secuencia a_k
Término inicial de secuencia a_k
Variable usada por la secuencia a_k

$$\sum (a_k, k, \alpha, \beta, n) \Rightarrow \sum_{k=\alpha}^{\beta} a_k$$

El cálculo de Σ es el cálculo de la suma parcial de secuencia a_k, usando la fórmula siguiente.

$$S = a_\alpha + a_{\alpha+1} + \text{........} + a_\beta = \sum_{k=\alpha}^{\beta} a_k$$

■ Ejemplo de cálculo de Σ

Ejemplo **Calcular lo siguiente:**

$$\sum_{k=2}^{6} (k^2 - 3k + 5)$$

Utilice n = 1 como la distancia entre particiones.

Secuencia de ingreso a_k.

[AC] [OPTN] [F4](CALC) [F6](▷) [F3](Σ() [ALPHA] [K] [x^2] [−] [3] [ALPHA] [K] [+] [5] [,]

Variable de ingreso usada por la secuencia a_k.

[ALPHA] [K] [,]

Ingrese el término de secuencia a_k y el último término de la secuencia a_k.

[2] [,] [6] [,]

Ingrese n.

[1] [)]

[EXE]

```
Σ(K²-3K+5,K,2,6,1)
                55
```

- La variable solamente puede usarse una sola vez para la secuencia de ingreso a_k.
- Ingrese los números enteros solamente para el término inicial de la secuencia a_k y el último término de la secuencia a_k.
- El ingreso de n y el símbolo de cierre de paréntesis pueden omitirse. Si omite n, la calculadora automáticamente utiliza $n = 1$.

Aplicaciones de cálculos de Σ

- Operaciones aritméticas usando las expresiones de cálculo de Σ

Expresiones: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

Operaciones posibles: $S_n + T_n$, $S_n - T_n$, etc.

- Operaciones aritméticas y funciones usando los resultados de cálculo de Σ

$2 \times S_n$, $\log (S_n)$, etc.

- Operaciones de funcion usando los términos de cálculo de Σ (a_k, k)

$\Sigma\,(\mathrm{sen}k, k, 1, 5)$, etc.

- Tenga en cuenta que no puede usar una resolución diferencial, diferencial cuadrática, integral, valor máximo/mínimo o expresión de cálculo de Σ, dentro de un término de cálculo de sumatoria (Σ).

- Asegúrese de que el valor usado como término final β es mayor que el valor usado como el término inicial α. De lo contrario se generará un error.
- Para interrumpir un cálculo de Σ que se está realizando (indicado cuando el cursor no está sobre la presentación), presione la tecla AC.