

Capítulo 10

Programoteca

- 1 Análise de factor primo
- 2 Máximo divisor comum
- 3 Valor do teste t
- 4 Círculo e tangentes
- 5 Rotação duma figura

Antes de utilizar a Programoteca

- Não se esqueça de verificar quantos bytes de memória tem disponível antes de tentar efectuar qualquer programação.
- Esta Programoteca está dividida em duas secções: uma secção de cálculos numéricos e uma secção de gráficos. Os programas da secção de cálculo numérico produzem apenas resultados, enquanto que os programas de gráficos utilizam a área de visor completa para desenhar gráficos. Tome também nota que os cálculos dos programas de gráficos não usam o sinal de multiplicação (\times) sempre que este puder ser omitido (ex. antes de abrir parênteses).

FOLHA DE PROGRAMAÇÃO DA CASIO

Programa para

Análise de factor primo

Nº

1

Descrição

Prodiz factores primos de números inteiros positivos arbitrários

Para $1 < m < 10^{10}$

Os números primos são primeiro produzidos a partir do valor mais baixo. Será visualizado "END" no fim do programa.

(Vista geral)

m é dividido por 2 e por todos os números ímpares sucessivos ($d = 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$) para verificar a sua divisibilidade.

Quando d é um factor primo, assume-se $m_i = m_{i-1}/d$, e repete-se a divisão até $\sqrt{m_i} + 1 \leq d$.

Exemplo [1]

$$119 = 7 \times 17$$

[2]

$$440730 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 59 \times 83$$

[3]

$$262701 = 3 \times 3 \times 17 \times 17 \times 101$$

Preparação e operação

- Guardar o programa escrito na página seguinte.
- Executar o programa da forma ilustrada

Passo	Operação de tecla	Visor	Passo	Operação de tecla	Visor
1	[F1] (EXE)	M?	11	[EXE]	83
2	119 [EXE]	7	12	[EXE]	END
3	[EXE]	17	13	[EXE]	M?
4	[EXE]	END	14	262701 [EXE]	3
5	[EXE]	M?	15	[EXE]	3
6	440730 [EXE]	2	16	[EXE]	17
7	[EXE]	3	17	[EXE]	17
8	[EXE]	3	18	[EXE]	101
9	[EXE]	5	19	[EXE]	END
10	[EXE]	59	20		

Nome do ficheiro	Programa																		
Linha	P	R	M	F	A	C	T												
1	Lbl	0	:	"	M	"	?	→	A	:	Goto	2	:						
2	Lbl	1	:	2	▲	A	+	2	→	A	:	A	=	1	⇒	Goto	9	:	
3	Lbl	2	:	Frac	(A	+	2)	=	0	⇒	Goto	1	:	3	→	B	:
4	Lbl	3	:	√	A	+	1	→	C	:									
5	Lbl	4	:	B	≥	C	⇒	Goto	8	:	Frac	(A	÷	B)	=	0	⇒
6	Goto	6	:																
7	Lbl	5	:	B	+	2	→	B	:	Goto	4	:							
8	Lbl	6	:	A	+	B	×	B	-	A	=	0	⇒	Goto	7	:	Goto	5	:
9	Lbl	7	:	B	▲	A	+	B	→	A	:	Goto	3	:					
10	Lbl	8	:	A	▲														
11	Lbl	9	:	"	E	N	D	"	▲	Goto	0								
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			
20																			
21																			
22																			
23																			
24																			
25																			
26																			
27																			
Conteúdo da memória	A	m_i			H				O				V						
	B	d			I				P				W						
	C	$\sqrt{m_i}+1$			J				Q				X						
	D				K				R				Y						
	E				L				S				Z						
	F				M				T										
	G				N				U										

FOLHA DE PROGRAMAÇÃO DA CASIO

Programa para

Máximo divisor comum

Nº

2

Descrição

As divisões sucessivas de Euclides são usadas para determinar o máximo divisor comum de dois números inteiros, a e b .

Para $|a|, |b| < 10^9$, os valores positivos são tomados como $< 10^{10}$

(Visão geral)

$$n_0 = \max(|a|, |b|)$$

$$n_1 = \min(|a|, |b|)$$

$$n_k = n_{k-2} - \left[\frac{n_{k-2}}{n_{k-1}} \right] n_{k-1}$$

$$k = 2, 3, \dots$$

Se $n_k = 0$, então o máximo divisor comum (c) será n_{k-1} .

Exemplo

	[1]	[2]	[3]
Quando	$a = 238$	$a = 23345$	$a = 522952$
	$b = 374$	$b = 9135$	$b = 3208137866$
	↓	↓	↓
	$c = 34$	$c = 1015$	$c = 998$

Preparação e operação

- Guardar o programa escrito na página seguinte.
- Executar o programa da forma ilustrada.

Passo	Operação de tecla	Visor	Passo	Operação de tecla	Visor
1	[F1] (EXE)	A?	11		
2	238 [EXE]	B?	12		
3	374 [EXE]	34	13		
4	[EXE]	A?	14		
5	23345 [EXE]	B?	15		
6	9135 [EXE]	1015	16		
7	[EXE]	A?	17		
8	522952 [EXE]	B?	18		
9	3208137866 [EXE]	998	19		
10			20		

Linha	Programa																		
Nome do ficheiro	C	M	N	F	A	C	T												
1	Lbl	1	:	"	A	"	?	→	A	:	"	B	"	?	→	B	:		
2	Abs	A	→	A	:	Abs	B	→	B	:									
3	B	<	A	⇒	Goto	2	:												
4	A	→	C	:	B	→	A	:	C	→	B	:							
5	Lbl	2	:	(-)	(Int	(A	+	B)	×	B	-	A)	→	C	:
6	C	=	0	⇒	Goto	3	:												
7	B	→	A	:	C	→	B	:	Goto	2	:								
8	Lbl	3	:	B	▲	Goto	1												
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			
20																			
21																			
22																			
23																			
24																			
25																			
26																			
27																			
Conteúdo da memória	A		a, n_0		H				O						V				
	B		b, n_1		I				P						W				
	C		n_k		J				Q						X				
	D				K				R						Y				
	E				L				S						Z				
	F				M				T										
	G				N				U										

FOLHA DE PROGRAMAÇÃO DA CASIO

Programa para	Valor do teste t	Nº	3
---------------	--------------------------------------	----	----------

Descrição

A média (média-amostragem) e o desvio padrão-amostragem podem ser usados para obter um valor do teste t .

$$t = \frac{(\bar{x} - m)}{\frac{s_{\sigma_{n-1}}}{\sqrt{n}}}$$

\bar{x} : média dos dados de x

$s_{\sigma_{n-1}}$: desvio padrão-amostragem dos dados de x

n : número de itens de dados

m : desvio-padrão populacional hipotético (normalmente representado por μ , mas m é utilizado aqui por causa das limitações nas definições das variáveis)

Exemplo

Para determinar se o desvio padrão da universo dos dados-amostragem 55, 54, 51, 55, 53, 53, 54, 52, é 53.

Efectue um teste t com um nível de significância de 5%.

Preparação e operação

- Guardar o programa escrito na página seguinte.
- Executar o programa da forma ilustrada.

Passo	Operação de tecla	Visor	Passo	Operação de tecla	Visor
1	[F1] (EXE)	M?	3		
2	53 [EXE]	T= 0.7533708035	4		

A operação acima produz um valor de teste t de $t(53) = 0,7533708035$. De acordo com a tabela de distribuição t da página seguinte, um nível de significância de 5% e um grau de liberdade de 7 ($n - 1 = 8 - 1 = 7$) produz um valor de teste t de duas direcções de aproximadamente 2,365.

Como o valor do teste t calculado é inferior ao valor da tabela, é aceite a hipótese m igual a 53 para a média do universo

Nome do ficheiro	Programa																		
1	{	5	5	,	5	4	,	5	1	,	5	5	,	5	3	,	5	3	,
2	5	4	,	5	2	}	→	List	1	↵									
3	f-Var	List	:	1	,	1	↵												
4	Lbl	:	0	:	"	M	"	?	→	M	↵								
5	(\bar{x}	-	M)	÷	(σ_{n-1}	÷	\sqrt{n})	→	T	↵					
6	"	T	=	"	:	T	↵												
7	Goto	:	0																

Conteúdo da memória	A	H	O	V
	B	I	P	W
	C	J	Q	X
	D	K	R	Y
	E	L	S	Z
	F	M	m	t
	G	N	U	

• Tabela da distribuição t

Os valores da primeira linha da tabela indicam a probabilidade (probabilidade de duas direcções) de o valor absoluto de t ser superior aos valores da tabela para um dado grau de liberdade.



M : ALPHA M

T : ALPHA T

P (Probabilidade) Grau de liberdade	0.2	0.1	0.05	0.01
1	3.078	6.314	12.706	63.657
2	1.886	2.920	4.303	9.925
3	1.638	2.353	3.182	5.841
4	1.533	2.132	2.776	4.604
5	1.476	2.015	2.571	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.707
7	1.415	1.895	2.365	3.499
8	1.397	1.860	2.306	3.355
9	1.383	1.833	2.262	3.250
10	1.372	1.812	2.228	3.169
15	1.341	1.753	2.131	2.947
20	1.325	1.725	2.086	2.845
25	1.316	1.708	2.060	2.787
30	1.310	1.697	2.042	2.750
35	1.306	1.690	2.030	2.724
40	1.303	1.684	2.021	2.704
45	1.301	1.679	2.014	2.690
50	1.299	1.676	2.009	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.660
80	1.292	1.664	1.990	2.639
120	1.289	1.658	1.980	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.576

FOLHA DE PROGRAMAÇÃO DA CASIO

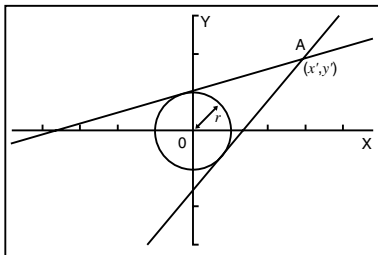
Programa para

Círculo e tangentes

Nº

4

Descrição



Fórmula para o círculo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Fórmula para a tangente que

passa pelo ponto $A(x', y')$:

$$y - y' = m(x - x')$$

* m representa a trajectória da tangente.

Com este programa, a trajectória m e a intersecção b ($= y' - mx'$) são obtidas para as rectas traçadas do ponto $A(x', y')$ e são tangentes a um círculo com o raio de r . A função de traçado é usada para apresentar graficamente as coordenadas nos pontos de tangência, e o factor zoom é usado para ampliar o gráfico.

Exemplo

Para determinar m e b para os seguintes valores:

$$r = 1$$

$$x' = 3$$

$$y' = 2$$

Notas

- O ponto plotado para A não poderá ser deslocado. Mesmo se o fizer no gráfico, o cálculo será efectuado com o valor original.
- Ocorrerá um erro (Ma ERROR) quando $r = x'$.
- Efectue sempre uma operação de traçado sempre que a tiver seleccionado e estiver no visor o aviso TRACE.

Preparação e operação


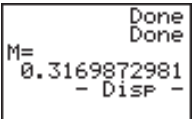

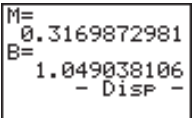

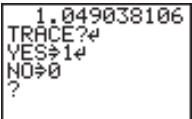

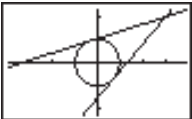

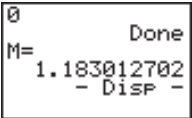
- Guardar o programa escrito na página seguinte.
- Executar o programa da forma ilustrada.


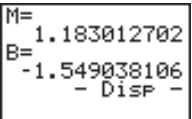

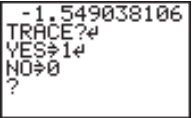

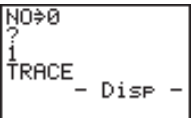


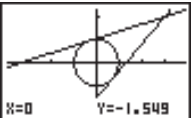

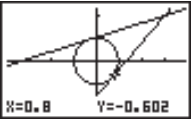
Conteúdo da memória	A		H		O		V	
	B		I		P		W	
	C		J		Q		X	
	D		K		R		Y	
	E		L		S		Z	
	F		M		T			
	G		N		U			


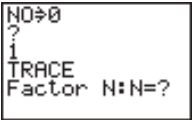

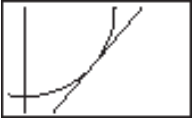

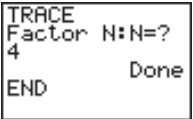
Linha	Programa																		
Nome do ficheiro	T	A	N	G	E	N	T												
1	Prog:	"	W	I	N	D	O	W	"	↵									
2	"	X	x ²	+	Y	x ²	=	R	x ²	↵									
3	R	=	"	?	→	R	↵												
4	Prog:	"	C	I	R	C	L	E	"	▲									
5	"	(X	,	Y)	↵												
6	X	=	"	?	→	A	↵												
7	"	Y	=	"	?	→	B	↵											
8	Plot:	A	,	B	▲														
9	R	x ²	(A	x ²	+	B	x ²	-	R	x ²)	→	P	↵				
10	(√	P	-	A	B)	(R	x ²	-	A	x ²)	x ⁻¹	→	M	↵	
11	Lbl	6	↵																
12	Graph Y=	M	(X	-	A)	+	B	▲									
13	"	M	=	"	:	M	▲												
14	"	B	=	"	:	B	-	M	A	▲									
15	Lbl	0	↵																
16	"	T	R	A	C	E	?	↵											
17	Y	E	S	⇒	1	↵													
18	N	O	⇒	0	"	:	?	→	Z	↵									
19	1	→	S	:	Z	=	1	⇒	Goto	1	↵								
20	Z	=	0	⇒	Goto	2	:	Goto	0	↵									
21	Lbl	2	↵																
22	((-)	A	B	-	√	P)	(R	x ²	-	A	x ²)	x ⁻¹	→	N	↵
23	Graph Y=	N	(X	-	A)	+	B	▲									
24	"	M	=	"	:	N	▲												
25	"	B	=	"	:	B	-	N	A	▲									
26	Lbl	5	↵																
27	"	T	R	A	C	E	?	↵											
28	Y	E	S	⇒	1	↵													
29	N	O	⇒	0	"	:	?	→	Z	↵									
30	2	→	S	:	Z	=	1	⇒	Goto	1	↵								
31	Z	=	0	⇒	Goto	3	:	Goto	5	↵									
32	Lbl	1	↵																
33	"	T	R	A	C	E	"	▲											
34	"	Factor:	N	:	N	=	"	?	→	F	:	Factor:	F	↵					

Linha	Programa																		
35	Prog	"	C	I	R	C	L	E	"	:	S	=	1	⇒	Goto:	9	↵		
36	S	=	2	⇒	Graph Y=	M	(X	-	A)	+	B	↵					
37	Graph Y=	N	(X	-	A)	+	B	↗									
38	Goto:	3	↵																
39	Lbl	9	↵																
40	Graph Y=	M	(X	-	A)	+	B	↗									
41	Prog	"	W	I	N	D	O	W	"	:	Prog:	"	C	I	R	C	L	E	"
42	:	Goto:	6	↵															
43	Lbl	3	↵																
44	"	E	N	D	"														
	Nome de ficheiro	W	I	N	D	O	W												
1	View Window	(-)	3	.	9	,	3	.	9	,	1	,	(-)	2	.	3	,	2	.
2		3	,	1															
	Nome de ficheiro	C	I	R	C	L	E												
1	Graph Y=	√	(R	x ²	-	X	x ²)	↵									
2	Graph Y=	(-)	√	(R	x ²	-	X	x ²)									

Passo	Operação de tecla	Visor
1	F1 (EXE)	<p>$X^2 + Y^2 = R^2$ R=?</p>
2	1 EXE	
3	EXE	<p>R=? 1 (X, Y) Done X=?</p>
4	3 EXE 2 EXE	
5	EXE	

Programa para Círculo e tangentes		Nº 4
Passo	Operação de tecla	Visor
6		
7		
8		
9	0 	
10		

Passo	Operação de tecla	Visor
11		
12		
13	1 	
14	  (TRC)	
15		

Programa para Círculo e tangentes		Nº 4
Passo	Operação de tecla	Visor
16		
17	4 	
18		

CASIO PROGRAM SHEET

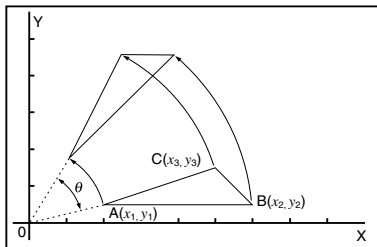
Programa para

Rotação duma figura

Nº

5

Descrição



Fórmula para a transformação das coordenadas:

$$(x, y) \rightarrow (x', y')$$

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Gráfico de rotação de qualquer figura geométrica por θ graus.

Exemplo

Para fazer a rotação de 30° do triângulo definido pelos pontos A (2, 0.5), B (6, 0.5) e C (5, 1.5)

Notas

- Use as teclas de cursor para mover o ponteiro pelo visor
- Para interromper a execução do programa, prima **AC**, enquanto visualiza o ecrã de gráfico.
- O triângulo não poderá ser desenhado se o resultado da operação de transformação das coordenadas exceder os parâmetros da janela de visualização.

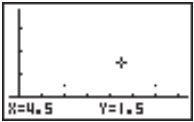


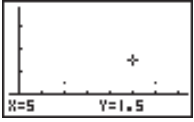
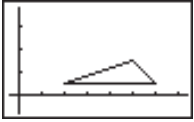
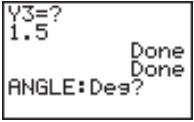
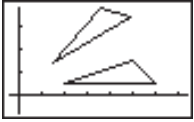
Preparação e operação

- Guardar o programa escrito na página seguinte.
- Executar o programa da forma ilustrada.

Conteúdo da memória	A	x_1	H	y'_1	O		V
	B	y_1	I	x'_2	P		W
	C	x_2	J	y'_2	Q	θ	X
	D	y_2	K	x'_3	R		Y
	E	x_3	L	y'_3	S		Z
	F	y_3	M		T		
	G	x'_1	N		U		

Linha	Programa																		
Nome do ficheiro	R	O	T	A	T	E													
1	View Window	(-)	0	.	4	,	7	.	4	,	1	,	(-)	0	.	8	,	3	.
2	8	,	1	:	Deg	↵													
3	"	(X	1	,	Y	1)	↵										
4	X	1	=	"	?	→	A	↵											
5	"	Y	1	=	"	?	→	B	↵										
6	Plot	A	,	B	▲														
7	X	→	A	:	Y	→	B	↵											
8	"	(X	2	,	Y	2)	↵										
9	X	2	=	"	?	→	C	↵											
10	"	Y	2	=	"	?	→	D	↵										
11	Plot	C	,	D	▲														
12	X	→	C	:	Y	→	D	↵											
13	"	(X	3	,	Y	3)	↵										
14	X	3	=	"	?	→	E	↵											
15	"	Y	3	=	"	?	→	F	↵										
16	Plot	E	,	F	▲														
17	X	→	E	:	Y	→	F	↵											
18	Lbl	1	↵																
19	Line	:	Plot	A	,	B	:	Line	:	Plot	C	,	D	:	Line	▲			
20	"	A	N	G	L	E	:	Deg	"	?	→	Q	↵						
21	A	cos	Q	-	B	sin	Q	→	G	↵									
22	A	sin	Q	+	B	cos	Q	→	H	↵									
23	Plot	G	,	H	↵														
24	C	cos	Q	-	D	sin	Q	→	I	↵									
25	C	sin	Q	+	D	cos	Q	→	J	↵									
26	Plot	I	,	J	:	Line	↵												
27	E	cos	Q	-	F	sin	Q	→	K	↵									
28	E	sin	Q	+	F	cos	Q	→	L	↵									
29	Plot	K	,	L	:	Line	↵												
30	Plot	G	,	H	:	Line	▲												
31	Cls	:	Plot	C	,	D	:	Plot	E	,	F	:	Goto	1					
32																			
33																			
34																			

Programa para Rotação duma figura		Nº 5
Passo	Operação de tecla	Visor
1	F1 (EXE)	<p>(X1, Y1) e X1=?</p>
2	2 EXE 0.5 EXE	<p>X=2 Y=0.5</p>
3	EXE	<p>Y1=? 0.5 Done (X2, Y2) e X2=?</p>
4	6 EXE 0.5 EXE	<p>X=6 Y=0.5</p>
5	EXE	<p>Y2=? 0.5 Done (X3, Y3) e X3=?</p>

Programa para		Nº
Rotação duma figura		5
Passo	Operação de tecla	Visor
6	4.5 EXE 1.5 EXE	
7	 ~  (Coloque o indicador em X = 5)	
8	EXE	
9	EXE	
10	30 EXE	

Continue, repetindo desde o passo 8.